

ピタゴラスの定理の証明

- まず「ピタゴラスの定理」とは何かということをお話しします。

直角三角形に関わるお話です。

直角三角形で有名なのは、底辺が3、高さが4、斜辺が5の直角三角形です。

このときに以下の以下の数式が成り立つというものです。

斜辺の長さ×斜辺の長さ＝底辺の長さ×底辺の長さ＋高さの長さ×高さの長さ

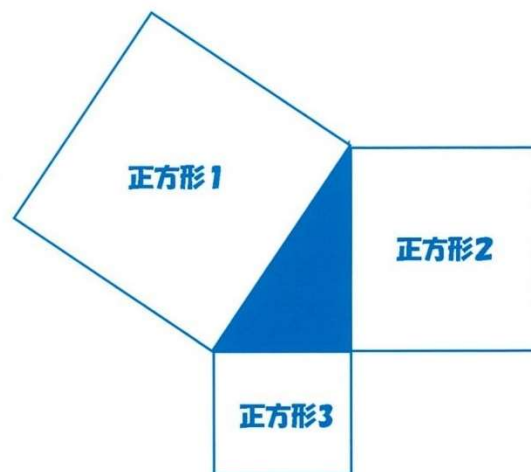
同じ数を2回かけることを2乗、3回だと3乗といいます。例えば、5の2乗というの
 $5 \times 5 = 25$ ということになります。これを記号であらわすと以下のようになります。
これは中学校で習いますので、

$5 \times 5 \rightarrow 5^2$ 右肩に小さくかける回数を書きます。

こういう決まりがあるので、上の等式をもう少しまとめて書くと以下の様になります。

$$\text{（斜辺の長さ）}^2 = \text{（底辺の長さ）}^2 + \text{（高さの長さ）}^2$$

図で示すと以下の通りです。各辺に正方形を書いた図がわかりやすいかと思います。
以下の内容が「ピタゴラスの定理」というものです。



正方形1の面積 = 正方形2の面積 + 正方形3の面積

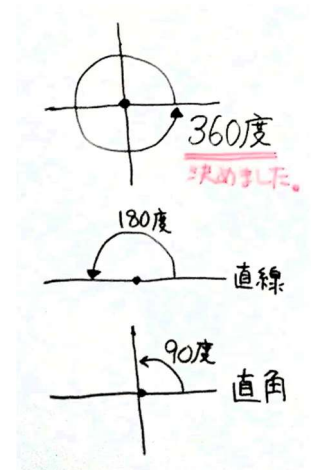
● (準備1) 角度という話をします。

分度器は知っていますか。分度器で角度を測ることができます。

まず、ぐるりと一周する角度を360度として決めています。

そしたら、まっすぐな直線は180度です。

その半分は、直角で90度になります。



● (準備2) それでは、三角形の内角の総和はいくらになりますか？

右図を見てください。

三角形があります。それぞれの角を「●」、「×」、「○」とします。

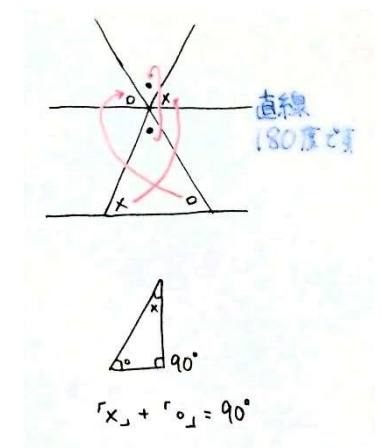
底辺と並行な直線を「●」のところに書きます。

そしたら、右図のように、その直線に「●」、「×」、「○」の角度がぴったりと入ります。

そしてそれは、直線になります。

直線は180度です。

だから、三角形の内角の和は180度だということがわかります。



直角三角形の場合だと、直角でない残りの2つの角度の和は90度だということがわかります。

● (準備3) 次に、相似(そうじ)という話をします。

相似(そうじ)というのは、同じ形だけど大きさが違うことをいいます。

例えば、ビー玉、ピンポン玉、そしてサッカーボールなどは、大きさは違うけども、どれも「球」です。これらは相似ということです。

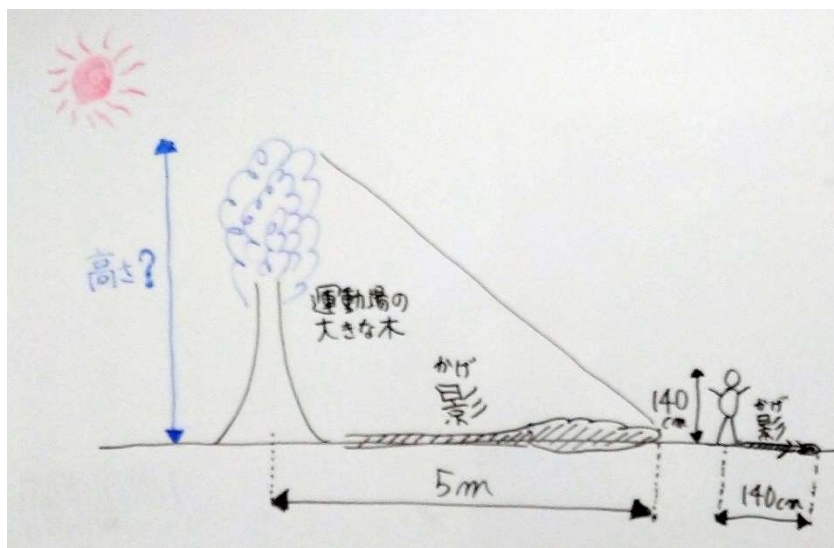
そんなに難しいことではないので、感覚で覚えてもらえればいいのか、と思います。

ここで問題です。

運動場の高い木が立っています。この木の高さを計りたいのですが、

どうやって図りますか。





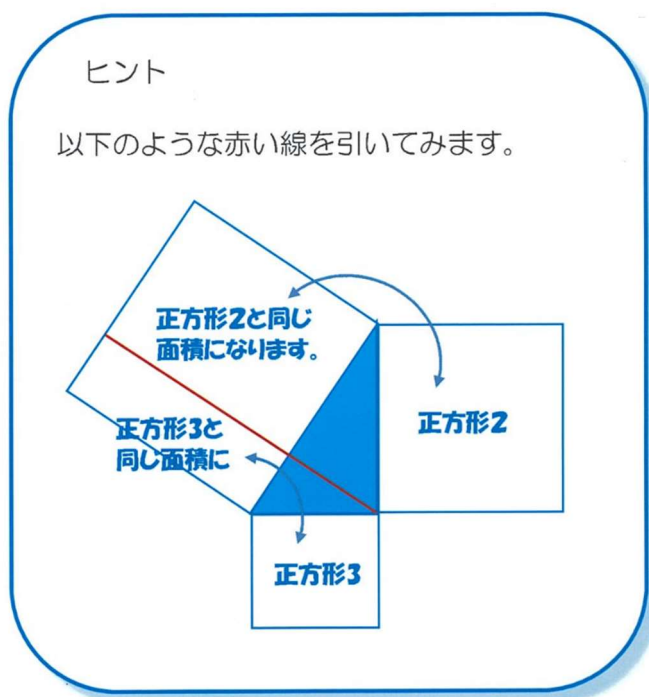
木の影が5 mあります。太郎君が身長が140cmです。太郎君の影を計ってみると、身長と同じ140cmでした。それじゃ、木の高さは、どれほどになりますか？

ここで考えたいのは、「木とその影で作る三角形」と「太郎君と彼の影で作る三角形」が相似形だということです。同じ形をしている、ということです。ということは、大きさは違うけども、その辺などの長さの割合が同じだということです。

ですから、太郎君の作る三角形が、身長と影の長さが140cmで同じ長さだということは、木の陰と木の高さも同じだ、ということです。

それでは、本題に入りたいと思います。

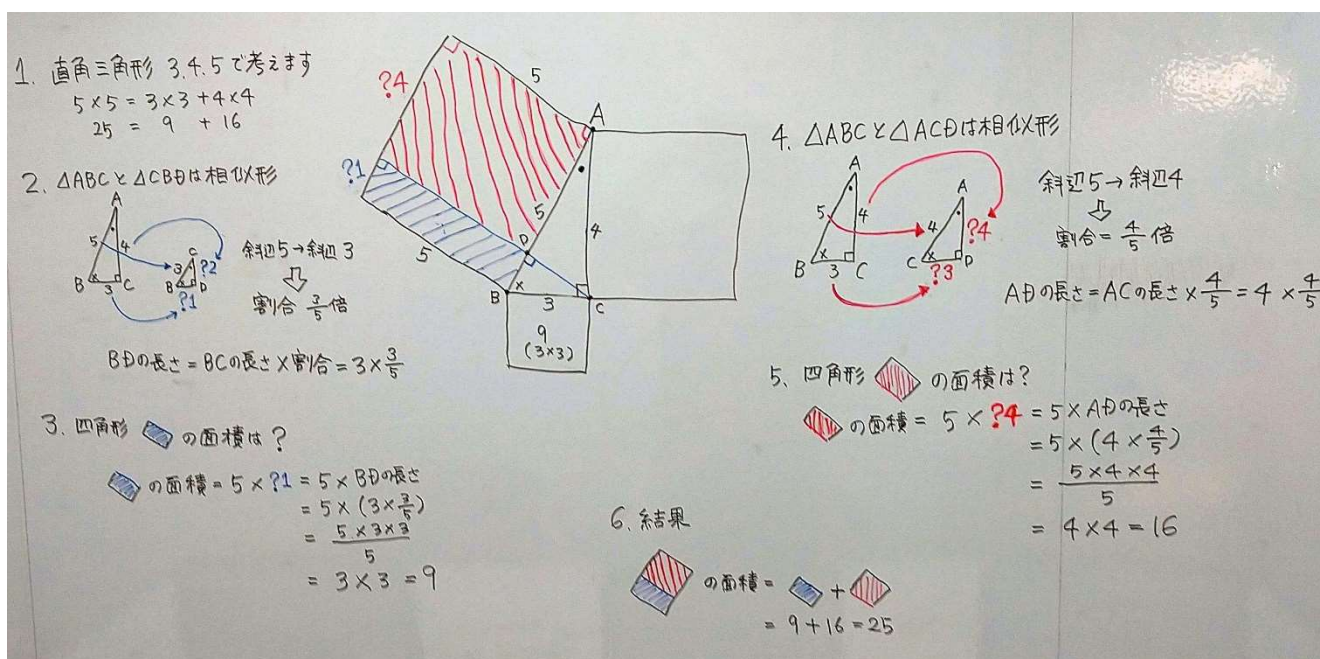
- (本論1) いよいよ本論に入ります。まずはヒント。



上図（前ページ）に書いた赤い線のことを補助線（ほじょせん）といいます。
 こういう補助線を引くことで問題がより簡単に解けるようになります。

●（本論2）実際の数字を使って話を進めます。

直角三角形で一番有名な、三辺の長さがそれぞれ3, 4, 5の直角三角形を使って話を進めます。ホワイトボードに説明をしたものを以下に示します。ちょっと文字が小さくて見ることができないかも・・・、



○ 直角三角形 3, 4, 5 で実際に考えてみます。

$$\begin{aligned} (\text{斜辺の長さ})^2 &= (\text{底辺の長さ})^2 + (\text{高さの長さ})^2 \\ 5 \times 5 &= 3 \times 3 + 4 \times 4 \end{aligned}$$

実際に合っています。

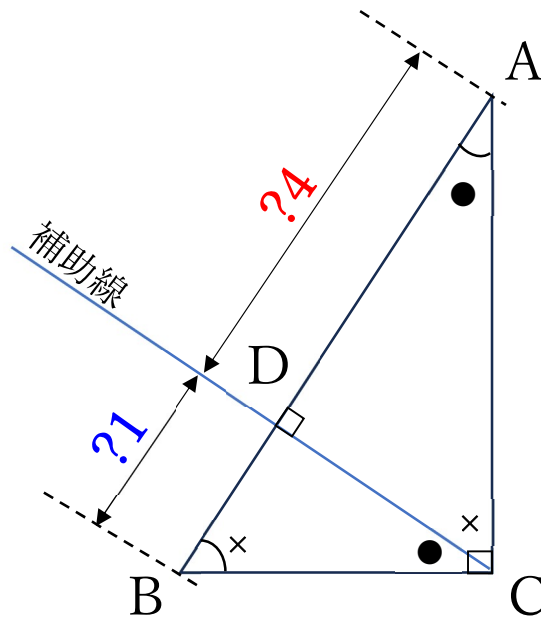
○ 斜辺にできる正方形の面積は、青色の四角と赤色の四角の面積を足したものです。上の写真でいうと、「?1」の長ささと、「?4」の長ささがわかれば、それぞれの四角の面積がわかります。

斜辺の正方形の面積 = 青色の四角の面積 + 赤色の四角の面積



ヒントに示したように結論から言うと、青色の四角の面積は、9になり、赤色の四角の面積は16になります。あわせて25ですから、話しは合っています。

- 上記の内容を証明するときを使うのが、「相似（そうじ）」です。
 求めたい長さは、「?1」と「?4」です。
 どの形が、相似形なのか、ということを見つけて、「?1」と「?4」の長さを考える、ということがポイントになります。
 三角形の角にA, B, C, Dと名付けて、それぞれの三角形を区別します。



$$\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CBD \quad \sim : \text{相似という意味}$$

- それじゃ、三角形の相似（そうじ）って、どういうことになるの？

三角形の相似というのは、三角形の角度が3つとも同じ場合。

→ 相似の場合、相對する辺の長さの割合は、同じ割合になります。

この法則を使って、「?1」と「?4」の長さをもとめることができます。

- 本論2の内容を当日お話ししようと思います。
 わかるところまでにいたします。
 事前に、お父さんとお母さんの協力があればうれしいです。

